An extension of order preserving operator inequalities(Inequalities in operator theory and its related topics)

山崎, 丈明; 柳田, 昌宏; 古田, 孝之

数理解析研究所講究録
1027 巻 1998 年 48-59

An extension of order preserving operator inequalities

東京理科大 理　山崎 文明　(Takeaki Yamazaki)
東京理科大 理　柳田 昌宏　(Masahiro Yanagida)
東京理科大 理　古田 孝之　(Takayuki Furuta)

1　はじめに

ここではヒルベルト空間上の有界線形作用素について考える。作用素 T がpositiveとは（$T \geq 0$ と書く。）$(Tx, x) \geq 0$ for all $x \in H$ のことと定義する。そして、T がstrictly positive（$T > 0$ と書く。）とは、T がpositive かつ invertible と定義する。ヒルベルト空間上のpositive operatorの順序を保存する作用素不等式として、次の大変有名な定理が知られている。

Theorem L-H (Löwner-Heinz inequality 1934). *If $A \geq B \geq 0$, then $A^{\alpha} \geq B^{\alpha}$ for any $\alpha \in [0, 1]$.*

上のTheorem L-H は $\alpha > 1$ の時は必ずしも成立しないので応用上不便であった。そこで応用上便利なように次の定理が確立された。

Theorem F (Furuta inequality 1987) [5].

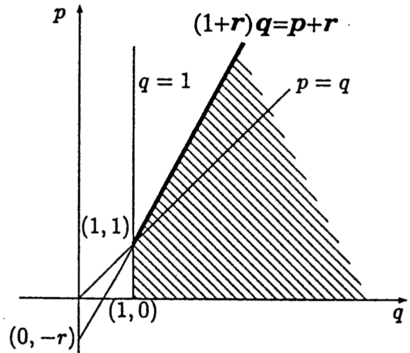
If $A \geq B \geq 0$, then for each $r \geq 0$,

(i)　$(B^{\frac{r}{2}}A^{p}B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (B^{\frac{r}{2}}B^{p}B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$

and

(ii)　$(A^{\frac{r}{2}}A^{p}A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (A^{\frac{r}{2}}B^{p}A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$

hold for $p \geq 0$ and $q \geq 1$ with $(1+r)q \geq p+r$.



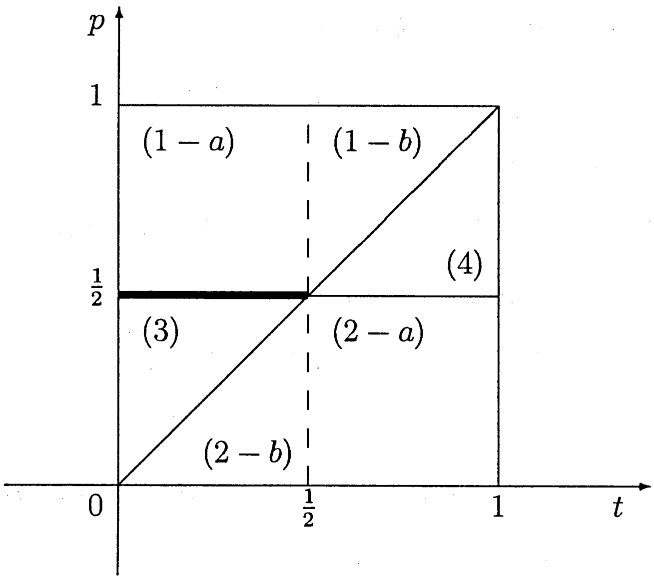
Figure

Theorem F は[5]で得られ[1],[8]で別証明が示され[6]で一頁の易しい証明が得られている。また、上の(i)と(ii)は右上のp, q, rで書かれた領域で成立し、この領域がbest possible domainであることが知られている[10]。そして、上の不等式において$r < 0$ の場合は次のようなTheorem Aが知られている。

Theorem A [9][11]. *Let A, $B \in B(H)$, then the following assertions hold.*

(1) *If $A \geq B \geq 0$ with $A > 0$, then* $A^{1-t} \geq (A^{\frac{-t}{2}}B^{p}A^{\frac{-t}{2}})^{\frac{1-t}{p-t}}$ *for $1 \geq p > t \geq 0$ with $p \geq \frac{1}{2}$.*
(2) *If $A \geq B \geq 0$ with $A > 0$, then* $A^{-t} \geq (A^{\frac{-t}{2}}B^{p}A^{\frac{-t}{2}})^{\frac{-t}{p-t}}$ *for $1 \geq t > p \geq 0$ with $\frac{1}{2} \geq p$.*
(3) *If $A \geq B \geq 0$ with $A > 0$, then* $A^{2p-t} \geq (A^{\frac{-t}{2}}B^{p}A^{\frac{-t}{2}})^{\frac{2p-t}{p-t}}$ *for $\frac{1}{2} \geq p > t \geq 0$.*
(4) *If $A \geq B \geq 0$ with $A > 0$, then* $A^{2p-1-t} \geq (A^{\frac{-t}{2}}B^{p}A^{\frac{-t}{2}})^{\frac{2p-1-t}{p-t}}$ *for $1 \geq t > p \geq \frac{1}{2}$.*

このTheorem A は最初にT.Yoshino によって(1)の一部を指摘され[13]、[2]によって(1)が示された。さらに[9] によって(1),(3)の見やすい証明が得られている。そして、[3][4]ではさらにそれの拡張である形も得られている。また、[11]では、(1)〜(4)までの不等式を示したことに加えて、(3)を除く3つの不等式(1),(2),(4)については外側の指数がbest possibleであることが示されている。よって、これまでにTheorem Aの各不等式は独立に示され、さらに(3)以外の不等式(1),(2),(4)の外側の指数はbest possibleであることが知られていた。なお、Theorem A の各不等式の成り立つ p と t の領域は次の図で表わすことができる。そして、(3)の領域は“Mysterious Δ-zone”と呼ばれている。ここでは(1)と(2)を二つの部分に分けて考える。そして、Theorem Aの各不等式の関係をいくつか示し、その応用として2つの定理と(3)についてのbest possibility に関する反例を示す。



Figure

2 4つの不等式の関係

まず最初に次の簡単なProposition を示そう。

Proposition 1. *Let $A, B \in B(H)$, then the following* (1) *ensures* (2);

(1) *If* $A \geq B \geq 0$ *with* $A > 0$, *then* $A^{1-t} \geq (A^{\frac{-t}{2}} B^{\frac{1}{2}} A^{\frac{-t}{2}})^{\frac{1-t}{\frac{1}{2}-t}}$ *for* $\frac{1}{2} > t \geq 0$.

(2) *If* $A \geq B \geq 0$ *with* $A > 0$, *then* $A^{2p-t} \geq (A^{\frac{-t}{2}} B^{p} A^{\frac{-t}{2}})^{\frac{2p-t}{p-t}}$ *for* $\frac{1}{2} \geq p > t \geq 0$.

上の(1)は上の図の中でちょうど太線の部分でありまた、この Proposition は E.Kamei によって、最初に示されているが、ここでは簡単な証明を紹介しよう。

Proof. $A \geq B \geq 0$ より、Theorem L-H を適用すると、$A^{2p} \geq B^{2p}$ for $\frac{1}{2} \geq p > 0$ が得られる。そこで、(1) の結論の不等式を適用すると、次の式が得られる。

$$(A^{2p})^{1-t_1} \geq \{(A^{2p})^{\frac{-t_1}{2}} (B^{2p})^{\frac{1}{2}} (A^{2p})^{\frac{-t_1}{2}}\}^{\frac{1-t_1}{\frac{1}{2}-t_1}} \quad \text{for } \frac{1}{2} > t_1 \geq 0. \tag{2.1}$$

そこで、(2.1) 式において、$t_1 = \frac{t}{2p}$ とおくと、

$$A^{2p-t} \geq (A^{\frac{-t}{2}} B^{p} A^{\frac{-t}{2}})^{\frac{2p-t}{p-t}} \quad \text{for } \frac{1}{2} \geq p > t \geq 0. \tag{2.2}$$

以上でProposition 1 を示すことができた。なお、このProposition 1 の発展としてのTheorem 5を第3章で紹介する。さらに、その他の不等式についてもそれぞれの関係を示していくが、その前にLemmaをいくつか紹介しよう。

Lemma F (Furuta 1995)[7]. *Let A be a positive invertible operator, and let B be an invertible operator. For any real number λ,*

$$(BAB^*)^{\lambda} = BA^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}B^*BA^{\frac{1}{2}})^{\lambda-1}A^{\frac{1}{2}}B^*.$$

Lemma 2. *If $A \geq B \geq 0$ with $A > 0$, then*

$$A^{-ps} \geq (A^{\frac{-1}{2}} B^{1-p} A^{\frac{-1}{2}})^s$$

holds for any $s \in [1,2]$ and $\frac{1}{s} \geq p \geq 0$.

このLemma 2 において、$s = \frac{1}{p}$ とおくと、次の Corollary が得られる。

Corollary 3. *If $A \geq B \geq 0$ with $A > 0$, then*

$$A^{-1} \geq (A^{\frac{-1}{2}} B^{1-p} A^{\frac{-1}{2}})^{\frac{1}{p}}$$

holds for any $p \in [\frac{1}{2}, 1]$.

さらに、Lemma 2 において、 $s = 2$ とおくと、次の Corollary が得られる。

Corollary 4. *If $A \geq B \geq 0$ with $A > 0$, then*

$$A^{-2p} \geq (A^{\frac{-1}{2}} B^{1-p} A^{\frac{-1}{2}})^2$$

holds for any $p \in [0, \frac{1}{2}]$.

なお、このCorollary 3 とCorollary 4 はそれぞれTheorem A の(2),(4) で $t = 1$ とおいた形になっていることがわかる。

Proof of Lemma 2 .
以下、すべての証明の中では A と B はinvertible と仮定してもよい。p と s の範囲より、次のようにLemma F を適用した後に、Theorem L-H を2回適用することが出来る。

$$\begin{aligned}
(A^{\frac{-1}{2}} B^{1-p} A^{\frac{-1}{2}})^s &= A^{\frac{-1}{2}} B^{\frac{1-p}{2}} (B^{\frac{1-p}{2}} A^{-1} B^{\frac{1-p}{2}})^{s-1} B^{\frac{1-p}{2}} A^{\frac{-1}{2}} \quad \text{by Lemma F} \\
&\leq A^{\frac{-1}{2}} B^{\frac{1-p}{2}} (B^{\frac{1-p}{2}} B^{-1} B^{\frac{1-p}{2}})^{s-1} B^{\frac{1-p}{2}} A^{\frac{-1}{2}} \quad \text{by Theorem L-H} \\
&= A^{\frac{-1}{2}} B^{1-ps} A^{\frac{-1}{2}} \\
&\leq A^{\frac{-1}{2}} A^{1-ps} A^{\frac{-1}{2}} \quad \text{by Theorem L-H} \\
&= A^{-ps}
\end{aligned}$$

よって、Lemma 2 を示すことが出来た。

2.1 4つの三角形のエリアについて

まず、Theorem A において、$(1) \cap (3) \to (4) \to (1-b) \to (2-b) \to (3)$ を示していこう。

(a). $(1) \cap (3) \to (4)$ 示す。まず、$A \geq B > 0$ に Corollary 4 を適用すると、次の式が得られる。

$$A^{-2(1-p)} \geq (A^{\frac{-1}{2}} B^p A^{\frac{-1}{2}})^2 \quad \text{for} \quad p \in [\frac{1}{2}, 1]. \tag{2.3}$$

そこで、(2.3)式に$(1) \cap (3)$ の不等式 (つまり、(3)の不等式に $p = \frac{1}{2}$ と置いたもの) を適用すると、次の式が得られる。

$$(A^{-2(1-p)})^{1-t_1} \geq \{(A^{-2(1-p)})^{\frac{-t_1}{2}} (A^{\frac{-1}{2}} B^p A^{\frac{-1}{2}})^{\frac{2}{2}} (A^{-2(1-p)})^{\frac{-t_1}{2}}\}^{\frac{1-t_1}{\frac{1}{2}-t_1}} \tag{2.4}$$

for $\frac{1}{2} > t_1 \geq 0$.
この、(2.4) 式を整理すると、次の式が得られる。

$$A^{-2(1-p)(1-t_1)} \geq (A^{\frac{2(1-p)t_1-1}{2}} B^p A^{\frac{2(1-p)t_1-1}{2}})^{\frac{1-t_1}{\frac{1}{2}-t_1}}. \tag{2.5}$$

そこで、(2.5) 式において $t_1 = \frac{1-t}{2(1-p)}$ と置くと、t_1, p の条件より、$1 \geq t > p \geq \frac{1}{2}$ となり、さらに $2(1-p)t_1 - 1 = -t$, $-2(1-p)(1-t_1) = 2p-1-t$, $\frac{1-t_1}{\frac{1}{2}-t_1} = \frac{2p-1-t}{p-t}$ が得られ、(2.5) 式は次の式に変形することができる。

$$A^{2p-1-t} \geq (A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}})^{\frac{2p-1-t}{p-t}} \qquad \text{for} \quad 1 \geq t > p \geq \frac{1}{2}.$$

よって、(1) ∩ (3) → (4) が示せた。

(b). (4) → $(1-b)$ 示す。まず、Theorem A の (4) の不等式の両辺に inverse をかけると、次の式を得ることができる。

$$A^{1+t-2p} \leq (A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}})^{\frac{1+t-2p}{p-t}} \qquad \text{for} \quad 1 \geq t > p \geq \frac{1}{2}. \tag{2.6}$$

すると、$1 \geq t > p \geq \frac{1}{2}$ より、$1+t-2p \geq 1-t \geq 0$ であるから、Theorem L-H を (2.6) 式に適用すると、次の式が得られる。

$$A^{1-t} \leq (A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}})^{\frac{1-t}{p-t}}. \tag{2.7}$$

そこで、(2.7) 式に Lemma F を適用すると、次の式が得られる。

$$A^{1-t} \leq A^{\frac{-t}{2}} B^{\frac{p}{2}} (B^{\frac{p}{2}} A^{-t} B^{\frac{p}{2}})^{\frac{1-p}{p-t}} B^{\frac{p}{2}} A^{\frac{-t}{2}}. \tag{2.8}$$

そこで、この (2.8) 式をさらに変形して、右辺の inverse を外に出すと結局次の式が得られる。

$$B^{\frac{-p}{2}} A B^{\frac{-p}{2}} \leq (B^{\frac{-p}{2}} A^t B^{\frac{-p}{2}})^{\frac{1-p}{t-p}} \qquad \text{for} \quad 1 \geq t > p \geq \frac{1}{2}. \tag{2.9}$$

そこで、(2.9) 式の右辺に $A \geq B$ を適用すると、次の式が得られる。

$$\begin{aligned} B^{1-p} &\leq B^{\frac{-p}{2}} A B^{\frac{-p}{2}} \qquad \text{by } A \geq B \\ &\leq (B^{\frac{-p}{2}} A^t B^{\frac{-p}{2}})^{\frac{1-p}{t-p}}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

そして、(2.10) 式に $p_1 = t$, $t_1 = p$ と置くと、次の式が得られる。

$$B^{1-t_1} \leq (B^{\frac{-t_1}{2}} A^{p_1} B^{\frac{-t_1}{2}})^{\frac{1-t_1}{p_1-t_1}} \qquad \text{for} \quad 1 \geq p_1 > t_1 \geq \frac{1}{2}. \tag{2.11}$$

この、(2.11) 式は結局次の式と同値であることがわかり、(4) → $(1-b)$ を示すことができた。

$$A^{1-t_1} \geq (A^{\frac{-t_1}{2}} B^{p_1} A^{\frac{-t_1}{2}})^{\frac{1-t_1}{p_1-t_1}} \qquad \text{for} \quad 1 \geq p_1 > t_1 \geq \frac{1}{2}.$$

(c). $(1-b)$ → $(2-b)$ 示す。まず、$A \geq B > 0$ に、Corollary 3 を適用すると、次の式が得られる。

$$A^{-1} \geq (A^{\frac{-1}{2}} B^{1-p} A^{\frac{-1}{2}})^{\frac{1}{p}} \qquad \text{for} \quad p \in [\frac{1}{2}, 1]. \tag{2.12}$$

そこで、(2.12)式にTheorem A の$(1-b)$の不等式を適用すると、次の式が得られる。

$$(A^{-1})^{1-t_1} \geq \{(A^{-1})^{\frac{-t_1}{2}}(A^{\frac{-1}{2}}B^{1-p}A^{\frac{-1}{2}})^{\frac{p_1}{p}}(A^{-1})^{\frac{-t_1}{2}}\}^{\frac{1-t_1}{p_1-t_1}} \tag{2.13}$$

for $1 \geq p_1 > t_1 \geq \frac{1}{2}$.
この、(2.13)式において、$p_1 = p$ と置くと次の式が得られる。

$$A^{-(1-t_1)} \geq (A^{\frac{-(1-t_1)}{2}}B^{1-p}A^{\frac{-(1-t_1)}{2}})^{\frac{1-t_1}{p-t_1}}. \tag{2.14}$$

そこで、(2.14)式の指数をさらに変形して次の式を得ることが出来る。

$$A^{-(1-t_1)} \geq (A^{\frac{-(1-t_1)}{2}}B^{1-p}A^{\frac{-(1-t_1)}{2}})^{\frac{-(1-t_1)}{(1-p)-(1-t_1)}} \tag{2.15}$$

for $\frac{1}{2} \geq 1-t_1 > 1-p \geq 0$.
そこで、(2.15)式において$t_2 = 1-t_1$, $p_2 = 1-p$ と置くと、次の式が得られる。

$$A^{-t_2} \geq (A^{\frac{-t_2}{2}}B^{p_2}A^{\frac{-t_2}{2}})^{\frac{-t_2}{p_2-t_2}} \qquad \text{for} \quad \frac{1}{2} \geq t_2 > p_2 \geq 0.$$

よって、$(1-b) \to (2-b)$ が示せた。

(d). $(2-b) \to (3)$ 示す。まず、$(2-b)$ をつぎの形で表わしておく。
$(2-b)$: $A \geq B > 0 \Rightarrow B^{-p} \leq (B^{\frac{-p}{2}}A^tB^{\frac{-p}{2}})^{\frac{-p}{t-p}}$ for $\frac{1}{2} \geq p > t \geq 0$.
これをふまえて、(3)の右辺にLemma F を適用すると、次のように変形することができる。

$$\begin{aligned}
(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}})^{\frac{2p-t}{p-t}} &= A^{\frac{-t}{2}}B^{\frac{p}{2}}(B^{\frac{p}{2}}A^{-t}B^{\frac{p}{2}})^{\frac{p}{p-t}}B^{\frac{p}{2}}A^{\frac{-t}{2}} \quad \text{by Lemma F} \\
&= A^{\frac{-t}{2}}B^{\frac{p}{2}}\{(B^{\frac{-p}{2}}A^tB^{\frac{-p}{2}})^{\frac{-p}{t-p}}\}^{-1}B^{\frac{p}{2}}A^{\frac{-t}{2}} \\
&\leq A^{\frac{-t}{2}}B^{\frac{p}{2}}B^pB^{\frac{p}{2}}A^{\frac{-t}{2}} \quad \text{by } (2-b) \\
&= A^{\frac{-t}{2}}B^{2p}A^{\frac{-t}{2}} \\
&\leq A^{2p-t} \quad \text{for} \quad \frac{1}{2} \geq p > t \geq 0. \quad \text{by Theorem L-H}
\end{aligned}$$

以上によって、Theorem A の4つの三角形のエリアはそれぞれ互いに導きあうことが出来ることがわかった。

2.2 2つの四角形のエリアについて

次に、Theorem A において、$(1-a) \leftrightarrow (2-a)$ を示そう。

(e). $(1-a) \to (2-a)$ を示す。$(1-a)$ の不等式 $A^{1-t} \geq (A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}})^{\frac{1-t}{p-t}}$ for $1 \geq p \geq \frac{1}{2} \geq t \geq 0$ with $p \neq t$. において、t の範囲を考えることと、Theorem L-H を適用して次の式を得ることが出来る。

$$A^t \geq (A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}})^{\frac{t}{p-t}}. \tag{2.16}$$

この、(2.16)式はさらに次のように変形できる。

$$A^t \geq (A^{\frac{t}{2}}B^{-p}A^{\frac{t}{2}})^{\frac{t}{t-p}}. \tag{2.17}$$

さらに、(2.17) 式の右辺に Lemma F を適用すると、次の式が得られる。

$$A^t \geq A^{\frac{t}{2}} B^{\frac{-p}{2}} (B^{\frac{-p}{2}} A^t B^{\frac{-p}{2}})^{\frac{p}{t-p}} B^{\frac{-p}{2}} A^{\frac{t}{2}}. \tag{2.18}$$

ここで、(2.18) 式を更に整理すると、次の式になる。

$$B^p \geq (B^{\frac{-p}{2}} A^t B^{\frac{-p}{2}})^{\frac{p}{t-p}}. \tag{2.19}$$

そして、(2.19) 式の両辺に inverse をとると、次の式が得られる。

$$B^{-p} \leq (B^{\frac{-p}{2}} A^t B^{\frac{-p}{2}})^{\frac{-p}{t-p}} \tag{2.20}$$

for $1 \geq p \geq \frac{1}{2} \geq t \geq 0$ with $p \neq t$.
ここで、(2.20) 式において、$p_1 = t$, $t_1 = p$ とおくと、次の式が得られる。

$$B^{-t_1} \leq (B^{\frac{-t_1}{2}} A^{p_1} B^{\frac{-t_1}{2}})^{\frac{-t_1}{p_1-t_1}}. \tag{2.21}$$

そして、この (2.21) 式は次の式と同値であることがわかる。

$$A^{-t_1} \geq (A^{\frac{-t_1}{2}} B^{p_1} A^{\frac{-t_1}{2}})^{\frac{-t_1}{p_1-t_1}} \tag{2.22}$$

for $1 \geq t_1 \geq \frac{1}{2} \geq p_1 \geq 0$ with $t_1 \neq p_1$.
よって、$(1-a) \to (2-a)$ が示せた。

(f). $(2-a) \to (1-a)$ を示す。$(2-a)$ の不等式 $A^{-t} \geq (A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}})^{\frac{-t}{p-t}}$ for $1 \geq t \geq \frac{1}{2} \geq p \geq 0$ with $p \neq t$. において、t の範囲を考えることと、Theorem L-H を適用して次の式を得ることが出来る。

$$A^{-(1-t)} \geq (A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}})^{\frac{-(1-t)}{p-t}}. \tag{2.23}$$

この、(2.23) 式はさらに次のように変形できる。

$$A^{t-1} \geq (A^{\frac{t}{2}} B^{-p} A^{\frac{t}{2}})^{\frac{t-1}{t-p}}. \tag{2.24}$$

さらに、(2.24) 式の右辺に Lemma F を適用すると、次の式が得られる。

$$A^{t-1} \geq A^{\frac{t}{2}} B^{\frac{-p}{2}} (B^{\frac{-p}{2}} A^t B^{\frac{-p}{2}})^{\frac{p-1}{t-p}} B^{\frac{-p}{2}} A^{\frac{t}{2}}. \tag{2.25}$$

ここで、(2.25) 式を更に整理すると、次の式になる。

$$B^{\frac{p}{2}} A^{-1} B^{\frac{p}{2}} \geq (B^{\frac{-p}{2}} A^t B^{\frac{-p}{2}})^{\frac{p-1}{t-p}}. \tag{2.26}$$

そして、(2.26) 式の両辺に inverse をとると、次の式が得られる。

$$B^{\frac{-p}{2}}AB^{\frac{-p}{2}} \leq (B^{\frac{-p}{2}}A^{t}B^{\frac{-p}{2}})^{\frac{1-p}{t-p}}. \tag{2.27}$$

さらに、この(2.27)式の右辺に $A \geq B$ を適用すると、次の式が得られる。

$$\begin{aligned} B^{1-p} &\leq B^{\frac{-p}{2}}AB^{\frac{-p}{2}} \qquad \text{by } A \geq B \\ &\leq (B^{\frac{-p}{2}}A^{t}B^{\frac{-p}{2}})^{\frac{1-p}{t-p}} \end{aligned} \tag{2.28}$$

for $1 \geq t \geq \frac{1}{2} \geq p \geq 0$ with $p \neq t$.
ここで、(2.28)式において、$p_1 = t$, $t_1 = p$ とおくと、次の式が得られる。

$$B^{1-t_1} \leq (B^{\frac{-t_1}{2}}A^{p_1}B^{\frac{-t_1}{2}})^{\frac{1-t_1}{p_1-t_1}}. \tag{2.29}$$

そして、この(2.29)式は次の式と同値であることがわかる。

$$A^{1-t_1} \geq (A^{\frac{-t_1}{2}}B^{p_1}A^{\frac{-t_1}{2}})^{\frac{1-t_1}{p_1-t_1}} \tag{2.30}$$

for $1 \geq p_1 \geq \frac{1}{2} \geq t_1 \geq 0$ with $t_1 \neq p_1$.

よって、$(2-a) \rightarrow (1-a)$ が示せた。以上のことより、$(2-a) \leftrightarrow (1-a)$ が示せた。

3 得られた結果

まず最初に、Theorem A の4つの不等式を一つの不等式にまとめると次のような定理を得ることが出来る。

Theorem 5. *If $A \geq B \geq 0$ with $A > 0$, then*

$$A^{q-t} \geq (A^{\frac{-t}{2}}B^{p}A^{\frac{-t}{2}})^{\frac{q-t}{p-t}}$$

holds under the condition (i) *or* (ii);

(i) $2p \geq q \geq p > t \geq 0$ *and* $1 \geq q > 0$

(ii) $1 \geq t > p \geq q \geq 2p-1$ *and* $1 > q \geq 0$.

Remark. Theorem 5 の条件(i)において、$q = 1$, $q = 2p$ とおくと、それぞれ Theorem A の(1),(3)がでる。さらに、Theorem 5 の条件(ii)において、$q = 0$, $q = 2p-1$ とおくと、それぞれ Theorem A の(2),(4)がでる。また、Theorem 5 の不等式はTheorem F と同値な次のTheorem F' の不等式と同じ形になっている。

Theorem F'. *If $A \geq B \geq 0$, then for each $q \in [0,1]$,*

$$A^{q-t} \geq (A^{\frac{-t}{2}}B^{p}A^{\frac{-t}{2}})^{\frac{q-t}{p-t}}$$

holds for $p \geq q$ and $t \leq 0$.

また、Theorem A の(3)においてはbest possible であるかどうかわかっていないが、Aで押さえる代わりに次のようにB で押さえたものはbest possible であるということもK.Tanahashi によって得られているが、ここでは別証明を示す。

Theorem 6. *If* $\frac{1}{2} \geq p > t \geq 0$ *and* $\alpha > 0$, *then there exist* $A, B \in B(H)$ *such that* $A \geq B \geq 0$ *with* $A > 0$ *and*

$$B^{2p+\alpha} \not\geq A^{\frac{t}{2}}(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}})^{\frac{2p-t+\alpha}{p-t}}A^{\frac{t}{2}}.$$

4 得られた結果の証明

Proof of Theorem 5 .

Case (i). 最初に仮定の $A \geq B \geq 0$ から、Theorem L-H を適用すると、$A^q \geq B^q$ for $1 \geq q > 0$ が得られる。そこで、この A^q, B^q において、Theorem A の(1)を適用すると、次の式が得られる。

$$(A^q)^{1-t_1} \quad \geq \quad \{(A^q)^{\frac{-t_1}{2}}(B^q)^{p_1}(A^q)^{\frac{-t_1}{2}}\}^{\frac{1-t_1}{p_1-t_1}} \tag{4.1}$$

for $1 \geq p_1 > t_1 \geq 0$ with $p_1 \geq \frac{1}{2}$.

となるが、この条件式を次のように書き換えることができる。

$$2p_1 \geq 1 \geq p_1 > t_1 \geq 0.$$

そこで、この(4.1)式において $p_1 = \frac{p}{q}$, $t_1 = \frac{t}{q}$ とおくと次の式になり、Theorem 5 の (i) が示せた。

$$A^{q-t} \quad \geq \quad (A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}})^{\frac{q-t}{p-t}} \tag{4.2}$$

for $2p \geq q \geq p > t \geq 0$ and $1 \geq q > 0$.

Case (ii). 最初に仮定の $A \geq B \geq 0$ with $A > 0$ から、Lemma 1 を適用すると、$A^{-ps} \geq (A^{\frac{-1}{2}}B^{1-p}A^{\frac{-1}{2}})^s$ for any $s \in [1,2]$ and $\frac{1}{s} \geq p \geq 0$ が得られる。そこで、$s = \frac{q}{p}$ とおくと、次の式が得られる。

$$A^{-q} \quad \geq \quad (A^{\frac{-1}{2}}B^{1-p}A^{\frac{-1}{2}})^{\frac{q}{p}} \tag{4.3}$$

for any $\frac{q}{p} \in [1,2]$ and $1 \geq q > 0$.

そこで、(4.3) 式に Theorem A の(1)を適用すると、次の式が得られる。

$$(A^{-q})^{(1-t_1)} \quad \geq \quad \{(A^{-q})^{\frac{-t_1}{2}}(A^{\frac{-1}{2}}B^{1-p}A^{\frac{-1}{2}})^{\frac{q}{p}p_1}(A^{-q})^{\frac{-t_1}{2}}\}^{\frac{1-t_1}{p_1-t_1}} \tag{4.4}$$

for $2p_1 \geq 1 \geq p_1 > t_1 \geq 0$.

そこで、この(4.4)式において $p_1 = \frac{p}{q}$, $t_1 = \frac{t}{q}$ とおくと次の式になる。

$$A^{-q+t} \quad \geq \quad (A^{\frac{-(1-t)}{2}}B^{1-p}A^{\frac{-(1-t)}{2}})^{\frac{q-t}{p-t}} \tag{4.5}$$

for $2p \geq q \geq p > t \geq 0$ and $1 \geq q > 0$.

この、(4.5)式をさらに次のように変形する。

$$A^{(1-q)-(1-t)} \quad \geq \quad (A^{\frac{-(1-t)}{2}}B^{1-p}A^{\frac{-(1-t)}{2}})^{\frac{(1-q)-(1-t)}{(1-p)-(1-t)}} \tag{4.6}$$

for $1 \geq 1-t > 1-p \geq 1-q \geq 2(1-p)-1$ and $1 > 1-q \geq 0$.

そこで、(4.6)式において、$q_2 = 1-q$, $p_2 = 1-p$, $t_2 = 1-t$ とおくと、次の式が得られ、Theorem 5 の (ii) が示せた。

$$A^{q_2-t_2} \geq (A^{\frac{-t_2}{2}} B^{p_2} A^{\frac{-t_2}{2}})^{\frac{q_2-t_2}{p_2-t_2}} \tag{4.7}$$

for $1 \geq t_2 > p_2 \geq q_2 \geq 2p_2 - 1$ and $1 > q_2 \geq 0$.
よって(i),(ii)より、Theorem 5 が示せた。

Remark. このTheorem 5 を示すのにTheorem A の(1)が本質的な部分を占めていることがわかる。そこで、Theorem A の(1)を次のように考えた場合はどうなるだろうか?

Theorem A-s (satellite version).
(1) *If* $A \geq B \geq 0$ *with* $A > 0$, *then* $A \geq B \geq A^{\frac{t}{2}}(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}})^{\frac{1-t}{p-t}} A^{\frac{t}{2}}$ *for* $1 \geq p > t \geq 0$ *with* $p \geq \frac{1}{2}$.
このようにTheorem A の(1)を考えると、次のTheorem 5-s が得られるが証明は略す。

Theorem 5-s.
(i) *If* $A \geq B \geq 0$ *with* $A > 0$, *then* $A^q \geq B^q \geq A^{\frac{t}{2}}(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}})^{\frac{q-t}{p-t}} A^{\frac{t}{2}}$
holds for any $2p \geq q \geq p > t \geq 0$ *and* $1 \geq q > 0$.

(ii) *If* $A \geq B \geq 0$ *with* $A > 0$, *then*

$$\begin{aligned} A^q &\geq A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{-1}{2}} B^p A^{\frac{-1}{2}})^{\frac{q-1}{p-1}} A^{\frac{1}{2}} \\ &\geq A^{\frac{t}{2}}(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}})^{\frac{q-t}{p-t}} A^{\frac{t}{2}} \end{aligned}$$

holds for any $1 \geq t > p \geq q \geq 2p - 1$ *and* $1 > q \geq 0$.

Proof of Theorem 6. 任意の $\alpha = \alpha(p,t) > 0$ に対して、次の式が成り立つと仮定する。

$$B^{2p+\alpha} \geq A^{\frac{t}{2}}(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}})^{\frac{2p-t+\alpha}{p-t}} A^{\frac{t}{2}} \tag{4.8}$$

for fixed p and t such that $\frac{1}{2} \geq p > t \geq 0$.
この、(4.8)式の右辺にLemma F を適用すると、次の式を得ることが出来る。

$$B^{2p+\alpha} \geq B^{\frac{p}{2}}(B^{\frac{p}{2}} A^{-t} B^{\frac{p}{2}})^{\frac{p+\alpha}{p-t}} B^{\frac{p}{2}}. \tag{4.9}$$

そして、(4.9)式をさらに変形すると、次の式が得られる。

$$B^{p+\alpha} \geq (B^{\frac{-p}{2}} A^t B^{\frac{-p}{2}})^{\frac{p+\alpha}{t-p}}. \tag{4.10}$$

さらに、(4.10)式の両辺にinverse をとると次の式が得られる。

$$B^{-(p+\alpha)} \leq (B^{\frac{-p}{2}} A^t B^{\frac{-p}{2}})^{\frac{-(p+\alpha)}{t-p}}. \tag{4.11}$$

ここで、(4.11)式において $p_1 = t$, $t_1 = p$ とおくと、次の式が得られる。

$$B^{-(t_1+\alpha)} \leq (B^{\frac{-t_1}{2}} A^{p_1} B^{\frac{-t_1}{2}})^{\frac{-(t_1+\alpha)}{p_1-t_1}} \tag{4.12}$$

for fixed t_1 and p_1 such that $\frac{1}{2} \geq t_1 > p_1 \geq 0$.
しかし、これは$(2-b)$ のbest possibility [11] より矛盾。よってTheorem 6 が示せた。
この、Theorem 6 によって次のことが分かった。

Corollary 7. *If* $\frac{1}{2} \geq p > t \geq 0$, *then there exist* $A, B \in B(H)$ *such that* $A \geq B \geq 0$ *with* $A > 0$ *and*

$$B \not\geq A^{\frac{t}{2}}(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}})^{\frac{1-t}{p-t}} A^{\frac{t}{2}}.$$

この具体的な example は J-F-Jiang によって得られている。

5 Mysterious Δ-zone 解決へむけて

それでは、次のような命題は成り立つのだろうか？

Conjecture. *If $A \geq B \geq 0$ with $A > 0$, then*

$$A \quad \geq \quad A^{\frac{t}{2}}(A^{\frac{-t}{2}}B^{p}A^{\frac{-t}{2}})^{\frac{1-p}{p-t}}A^{\frac{t}{2}} \qquad \textit{holds for any } \frac{1}{2} \geq p > t \geq 0. \tag{5.1}$$

このConjectureは以前からT.Furutaによって、次のような２つの事より成立しないと予想されていた。

(1)、$p=\frac{5}{12}$, $t=\frac{1}{8}$ としたとき、(5.1) 式の右辺を変形していくと、次のようになる。

$$\begin{aligned} A^{\frac{1}{16}}(A^{\frac{-1}{16}}B^{\frac{5}{12}}A^{\frac{-1}{16}})^{3}A^{\frac{1}{16}} &= B^{\frac{5}{12}}A^{\frac{-1}{8}}B^{\frac{5}{12}}A^{\frac{-1}{8}}B^{\frac{5}{12}} \\ &\leq B^{\frac{5}{12}}A^{\frac{-1}{8}}A^{\frac{5}{12}}A^{\frac{-1}{8}}B^{\frac{5}{12}} \quad \text{by Theorem L-H} \\ &= B^{\frac{5}{12}}A^{\frac{2}{12}}B^{\frac{5}{12}} \\ &\leq A. \quad (\text{(5.1) 式の左辺の } A \text{ になったとして}) \end{aligned}$$

この最後の A は (5.1) 式の左辺の A が出てほしいということで A と置いてみただけである、ここで最後の不等式を考えてみるが、

$$A \equiv \begin{pmatrix} 204 & 189 \\ 189 & 207 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 130 & 84 \\ 84 & 58 \end{pmatrix} \equiv B > 0.$$

としたときに最後の不等式が成り立たないということがわかっている。つまり、Theorem L-H を一回使っただけで(5.1) 式において、$p=\frac{5}{12}$, $t=\frac{1}{8}$ とおいた場合は証明できないということがわかった。

(2)、また、$f(p) \equiv A^{\frac{t}{2}}(A^{\frac{-t}{2}}B^{p}A^{\frac{-t}{2}})^{\frac{1-t}{p-t}}A^{\frac{t}{2}}$ とした時に次のようなこともわかっている。

(イ) $p \geq 1$ and $t \leq 0 \Longrightarrow$

$$A \geq B \geq A^{\frac{t}{2}}(A^{\frac{-t}{2}}B^{p}A^{\frac{-t}{2}})^{\frac{1-t}{p-t}}A^{\frac{t}{2}} \qquad f(p) \text{ の } p \text{ についての単調性あり。}$$

(ロ) $1 \geq p > t \geq 0$ and $p \geq \frac{1}{2} \Longrightarrow$

$$A \geq B \geq A^{\frac{t}{2}}(A^{\frac{-t}{2}}B^{p}A^{\frac{-t}{2}})^{\frac{1-t}{p-t}}A^{\frac{t}{2}} \qquad f(p) \text{ の } p \text{ についての単調性なし。}$$

(ハ) $\frac{1}{2} \geq p > t \geq 0 \Longrightarrow$

$$A^{2p} \geq B^{2p} \geq A^{\frac{t}{2}}(A^{\frac{-t}{2}}B^{p}A^{\frac{-t}{2}})^{\frac{2p-t}{p-t}}A^{\frac{t}{2}} \qquad f(p) \text{ の } p \text{ についての単調性なし。}$$

ただし、(ハ)においては $f(p) \equiv A^{\frac{t}{2}}(A^{\frac{-t}{2}}B^{p}A^{\frac{-t}{2}})^{\frac{2p-t}{p-t}}A^{\frac{t}{2}}$ として考えた。

つまり、(イ)、(ロ)、(ハ) の順に結果が弱くなっている。この事は非常に自然なことと思われる。

以上の２つのことから (5.1) 式は一般的には成立しないと予想していた。そして、実際に次の結果が得られた。

Theorem 8 (Counterexample). *If $p=0.3$ and $t=0.15$, then there exist $A, B \in B(H)$ such that $A \geq B \geq 0$ with $A > 0$ and*

$$A \ngeq A^{\frac{t}{2}}(A^{\frac{-t}{2}}B^{p}A^{\frac{-t}{2}})^{\frac{1-t}{p-t}}A^{\frac{t}{2}}.$$

Example. まず、$1-2p \geq \alpha > 0$ として、X, Y を次のように定義する。

$$X \equiv A^{2p+\alpha} - A^{\frac{t}{2}}(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}})^{\frac{2p-t+\alpha}{p-t}}A^{\frac{t}{2}}.$$

$$Y \equiv B^{2p+\alpha} - A^{\frac{t}{2}}(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}})^{\frac{2p-t+\alpha}{p-t}}A^{\frac{t}{2}}.$$

そして、

$$A \equiv \begin{pmatrix} 18926 & 2549 & 26988 \\ 2549 & 38479 & 3638 \\ 26988 & 3638 & 38524 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 19 & 0 & 0 \\ 0 & 38133 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv B.$$

$p = 0.3,\ t = 0.15$ とすると、

(1). $\alpha = 1-2p = 0.4$ の時。

$$X = \begin{pmatrix} 18916.25\cdots & 2587.35\cdots & 26990.14\cdots \\ 2587.35\cdots & 432.25\cdots & 3655.53\cdots \\ 26990.14\cdots & 3655.53\cdots & 38523.50\cdots \end{pmatrix}$$

となり、X の固有値は $57785.0756\cdots, 87.9132\cdots, -0.9723\cdots$ となり、$X \not\geq 0$ であることがわかる。また、

$$Y = \begin{pmatrix} 9.2543\cdots & 38.3541\cdots & 2.1437\cdots \\ 38.3541\cdots & 86.2527\cdots & 17.5346\cdots \\ 2.1437\cdots & 17.5346\cdots & 0.5094\cdots \end{pmatrix}$$

となり、Y の固有値は $104.8795\cdots, -9.5621\cdots, 0.6990\cdots$ となり、$Y \not\geq 0$ であることがわかる。

(2). $0.37 = \alpha < 1-2p = 0.4$ の時。

$$X = \begin{pmatrix} 13614.65\cdots & 1817.80\cdots & 19425.33\cdots \\ 1817.80\cdots & 300.01\cdots & 2567.35\cdots \\ 19425.33\cdots & 2567.35\cdots & 27728.05\cdots \end{pmatrix}$$

となり、X の固有値は $41578.4615\cdots, 64.2655\cdots, -0.0014\cdots$ となり、$X \not\geq 0$ であることがわかる。また、

$$Y = \begin{pmatrix} 8.2638\cdots & 27.9370\cdots & 2.0135\cdots \\ 27.9370\cdots & 60.1809\cdots & 12.7824\cdots \\ 2.0135\cdots & 12.7824\cdots & 0.5413\cdots \end{pmatrix}$$

となり、Y の固有値は $74.4826\cdots, -6.1697\cdots, 0.6733\cdots$ となり、$Y \not\geq 0$ であることがわかる。さらに $p = 2t$ を満たしているが p の値が更に小さい場合には Theorem 8 は 2×2 行列で反例が示せることも得られている。

以上のことから Theorem A の (3) についても次のことが予想できるが、まだ一般的な証明は得られていない。

Conjecture. *If* $\frac{1}{2} \geq p > t \geq 0$ *and* $\alpha > 0$, *then there exist* $A, B \in B(H)$ *such that* $A \geq B \geq 0$ *with* $A > 0$ *and*

$$A^{2p+\alpha} \not\geq A^{\frac{t}{2}}(A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}})^{\frac{2p-t+\alpha}{p-t}}A^{\frac{t}{2}}.$$

参考文献

[1] M.Fujii, *Furuta's inequality and its mean theoretic approach*, J. Operator Theory **23** (1990), 67–72.

[2] M.Fujii, T.Furuta and E.Kamei, *Complements to the Furuta Inequality*, Proc. Japan Acad. **70** (1994), 239–242.

[3] M.Fujii, T.Furuta and E.Kamei, *Complements to the Furuta Inequality III*, Math. Japon. **45** (1997), 25–32.

[4] M.Fujii, J.F.Jiang and E.Kamei, *Complements to the Furuta Inequality IV*, Math. Japon. **45** (1997), 511–518.

[5] T.Furuta, $A \geq B \geq 0$ *assures* $(B^rA^pB^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ *for* $r \geq 0,\ p \geq 0,\ q \geq 1$ *with* $(1+2r)q \geq p+2r$, Proc. Amer. Math. Soc. **101** (1987), 85–88.

[6] T.Furuta, *An elementary proof of an order preserving inequality*, Proc. Japan Acad. **65** (1989), 126.

[7] T.Furuta, *Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai log-majorization*, Linear Algebra Appl. **19** (1995), 139–155.

[8] E.Kamei, *A satellite to Furuta's inequality*, Math. Japon. **33** (1988), 883–886.

[9] E.Kamei, *Complements to the Furuta Inequality II*, Math. Japon. **45** (1997), 15–23.

[10] K.Tanahashi, *Best possibility of the Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 141–146.

[11] K.Tanahashi, 巾が負の古田不等式, RIMS **903** (1995), 78–96.

[12] K.Tanahashi, *The Furuta inequality with negative powers*, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[13] T.Yoshino, *Introduction to Operator Theory*, Pitman Research Notes in Math. Ser., 300, Longman Scientific and Technical, 1993.